

Analiza matematyczna II.2, MIM UW, 2011/12

Egzamin, część zadaniowa, 5 czerwca 2012

Uwaga: Rozwiązanie **każdego** zadania proszę napisać na **oddzielnej** kartce. Proszę podpisać każdą z oddawanych kartek, umieszczając na nich:

Imię i nazwisko, nr albumu, nr grupy i potoku, nazwisko prowadzącego ćwiczenia

Czas: 150 minut

Zadanie 1 (12 punktów). Funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy C^2 . Jej pochodne cząstkowe drugiego rzędu spełniają warunek

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}) \right| \leq 1 \quad \text{dla wszystkich } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, j, k \in \{1, 2\}.$$

Wykazać, że

$$\left| \pi f(0, 0) - \iint_{B(0,1)} f \, d\lambda_2 \right| < \frac{3}{2}.$$

Zadanie 2 (12 punktów). Niech $f_n: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(\mathbf{x}) := \chi_{B(0,1) \setminus B(0,1/n)}(\mathbf{x}) \cdot n \ln \left(\frac{1 + n \|\mathbf{x}\|^\alpha}{n \|\mathbf{x}\|^\alpha} \right).$$

Dla jakich $\alpha > 0$ ciąg f_n jest zbieżny w przestrzeni $L^1(B(0, 1))$ (z miarą Lebesgue'a)?

Zadanie 3 (12 punktów). Na elipsoidzie $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$ rozważamy zbiór $S = E \cap \{(x, y, z): y > x, y > 0 \text{ i } z > 0\}$. Obliczyć całkę względem miary powierzchniowej σ_2 :

$$\iint_S xyz \, d\sigma_2.$$

Zadanie 4 (12 punktów). Niech $\omega = (-2y + x^2y + x^2) dx + (2x - xy^2 + y^2) dy$. Znaleźć taki obszar ograniczony $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o brzegu kawałkami gładkim, żeby całka

$$\int_{\partial\Omega} \omega$$

była możliwie największa. (Brzeg obszaru ma naturalną orientację).

Zadanie 5 (12 punktów). Niech $\phi \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ we współrzędnych (x, y, z) będzie dana wzorem

$$\phi = (x - y^2 + z^3)(dy \wedge dz + dx \wedge dz + dx \wedge dy).$$

Obliczyć całkę z formy ϕ po brzegu kostki $C_a = \{(x, y, z) | 0 \leq x, y, z \leq a\}$; strona zewnętrzna brzegu jest "dodatnia".

Egzamin z Analizy Matematycznej II.2, 23 czerwca 2016r.

Czas trwania: 150 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na osobnych kartkach, podpisanych imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

1. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$. Obliczyć $\int_A \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\lambda_2$.

2. Obliczyć całkę z formy różniczkowej

$$\omega = \frac{x^2 y^4 (5x dy - 3y dx)}{x^6 + y^{10}}$$

wzdłuż łuku elipsy $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 4y^2 = 4\}$ o początku $(1, 1)$ i końcu $(1, -1)$, przechodzącego przez punkt $(-1, 0)$.

Wskazówka: Zadanie można rozwiązać na kilka sposobów. Można np. skorzystać z równości $x^2 y^4 (5x dy - 3y dx) = x^3 \cdot 5y^4 dy - y^5 \cdot 3x^2 dx = x^3 d(y^5) - y^5 d(x^3)$.

3. Dana jest rozmaitość $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < z = \sqrt{x^2 + y^2} < 2\}$, zorientowana następująco: w każdym punkcie wektor normalny, wyznaczający stronę dodatnią, ma składową z -ową ujemną. Obliczyć całkę po M z formy $\omega = x dy \wedge dz - (y + 2z) dz \wedge dx + dx \wedge dy$.

4. Niech P będzie fragmentem paraboloidy $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4z\}$, złożonym z punktów, których odległość od prostej $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2, y = 0\}$ jest mniejsza od 1. Paraboloidea jest zorientowana następująco: w każdym punkcie wektor normalny, wyznaczający stronę dodatnią, ma składową z -ową dodatnią. Dla zadanego pola wektorowego

$$\vec{F}(x, y, z) = \left[-\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, \frac{y}{x-z} \right]$$

obliczyć przepływ (strumień) pola $\overrightarrow{\text{rot} F}$ przez P ze strony ujemnej na dodatnią.

Uwaga: Przepływ pola wektorowego $G = [g_1, g_2, g_3]$ przez fragment 2-rozmaitości zorientowanej wyraża całka (po tym fragmencie) z 2-formy $g_1 dy \wedge dz + g_2 dz \wedge dx + g_3 dx \wedge dy$.

5. Niech

$$\omega = |x|^{-n} \{ x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - x_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n \\ + x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + (-1)^{n-1} x_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \}$$

będzie $(n-1)$ -formą w $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, gdzie $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

(a) Czy ω jest zamknięta?

(b) Pokazać, że

$$\int_M \omega \neq 0,$$

gdzie M jest brzegiem kostki $K = [-1, 1]^n$, zorientowanym w dowolny sposób. Wывnio-skować stąd, że ω nie jest dokładna.

**Egzamin poprawkowy z Analizy Matematycznej II.2,
5 września 2016r.**

Czas trwania: 150 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na osobnych kartkach, podpisanych imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu.

1. Obliczyć miarę powierzchniową zbioru $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \leq x\}$.

2. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 1 \leq xy \leq 4, 1 \leq y/x \leq 4\}$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \frac{\ln(n + y^3) - \ln n}{\sin(x/n)} d\lambda_2.$$

3. Na elipsoidzie $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 = 4\}$ rozważamy zbiór $A = \{(x, y, z) \in E : y > x, y > 0, z > 0\}$. Obliczyć $\int_A xyz d\sigma_2$.

4. Załóżmy, że zbiór $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1\}$ ma dodatnio zorientowany brzeg (w każdym punkcie $(x, y) \in \partial D$ wektor normalny, wyznaczający stronę dodatnią, wskazuje „na zewnątrz” zbioru D). Obliczyć

$$\int_{\partial D} \frac{x dx + (y + 1) dy}{x^2 + y^2}.$$

5. Rozważmy zbiór $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$, zorientowany „na zewnątrz”: w każdym punkcie $(x, y, z) \in P$ wektor normalny, wyznaczający stronę dodatnią, wynosi $[x, y, 0]$. Dla zadanego pola wektorowego $\vec{F}(x, y, z) = [x^2 y z, z, 1]$, obliczyć przepływ (strumień) pola $\vec{F}$ przez P ze strony ujemnej na dodatnią.

Uwaga: Przepływ pola wektorowego $G = [g_1, g_2, g_3]$ przez fragment 2-rozmaitości zorientowanej wyraża całka (po tym fragmencie) z 2-formy $g_1 dy \wedge dz + g_2 dz \wedge dx + g_3 dx \wedge dy$.